

dr inż. Michał Batsch, prof. dr hab. inż. Tadeusz Markowski

Katedra Konstrukcji Maszyn, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska

mgr inż. Mieczysław Zubrzycki

Inżynieria Rzeszów S.A.

# Matematyczny model wewnętrznego zazębienia palcowego

W pracy przedstawiono matematyczny model wewnętrznego zazębienia palcowego. Zaprezentowano wyniki analizy styku zębów przeprowadzonej na podstawie opracowanego modelu dla przykładowej pary zębatej. Ponadto wyznaczono wpływ błędu rozstawienia osi kół przekładni na stopień pokrycia oraz błąd przekazywania ruchu.

Powszechnie stosowanym zarysem zębów w przekładniach zębatych jest zarys ewolwentowy. Ma on wiele zalet, do których należą stałość kierunku działania siły międzyzębnej oraz możliwość obróbki obwodniowej narzędziami znormalizowanymi o stosunkowo nieskomplikowanej geometrii. Istnieją również inne nieewolwentowe zarysy zębów, takie jak kołowo-łukowe [7] czy cykloidalne. Zazębienie cykloidalne stosowane jest w mechanizmach zegarowych [5], reduktorach cykloidalnych [8] i pompach zębatych [4]. Szczególnym przypadkiem zazębienia cykloidalnego jest zazębienie palcowe, będące najprawdopodobniej najstarszym zazębieniem nieewolwentowym [3]. Współcześnie znajduje ono zastosowanie w napędach dużych konstrukcji, takich jak np. obrotnice samochodowe lub kolejowe [2] i obrotowe restauracje [1], w których przekazywany jest duży moment przy małej prędkości obrotowej. Najważniejszą zaletą zazębienia palcowego jest możliwość wykonania zębów jednego z kół w postaci łożyskowych rolek, co pozwala na zmniejszenie zużycia ściernego oraz na pracę w warunkach niedostatecznego smarowania.

## Matematyczny model zazębienia

Analizowaną przekładnią jest przekładnia walcowa o zazębieniu wewnętrznym. Zębnik mający uzębienie zewnętrzne współpracuje z kołem o zębach w postaci rolek. Wprowadzono nieruchomy układ współrzędnych związany z korpusem przekładni  $x_p, y_p$ , oraz ruchome układy sztywno związane odpowiednio z zębnikiem oraz kołem  $x_1, y_1$  i  $x_2, y_2$  (rys. 1). Zębnik o liczbie zębów  $z_1$  obraca się wokół punktu  $O_1$  o kąt  $\varphi_1$  zgodnie z kierunkiem trygonometrycznym. Koło o liczbie zębów  $z_2$  natomiast obraca się wokół punktu  $O_2$  o kąt  $\varphi_2$  również

zgodnie z kierunkiem trygonometrycznym. Środki kół, a tym samym środki układów współrzędnych rozsunięte są na odległość  $a - \Delta a$ , gdzie  $\Delta a$  to błąd rozstawienia osi kół. Zarys zęba zębnika 1 w układzie współrzędnych  $x_1, y_1$  opisany jest wektorem wodzącym  $\vec{r}_1^{(1)}$ .

Podobnie zarys zęba koła 2 w układzie współrzędnych  $x_2, y_2, z_2$  opisany jest wektorem wodzącym  $\vec{r}_2^{(2)}$ . Wobec powyższego zgodnie z rys. 1 zarysy zębów zębnika i koła w nieruchomym układzie współrzędnych  $x_p, y_p, z_p$  określone będą wzorami (1) i (2):

$$\vec{r}_1^{(f)} = M_{f1} \vec{r}_1^{(1)} \quad (1)$$

$$\vec{r}_2^{(f)} = M_{f2} \vec{r}_2^{(2)} \quad (2)$$

gdzie:  $M_{f1}$  – jednorodna macierz transformacji z układu 1 do  $f$ ,  $M_{f2}$  – jednorodna macierz transformacji z układu 2 do układu  $f$ . Poszczególne macierze przyjmą postać:

$$M_{f1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

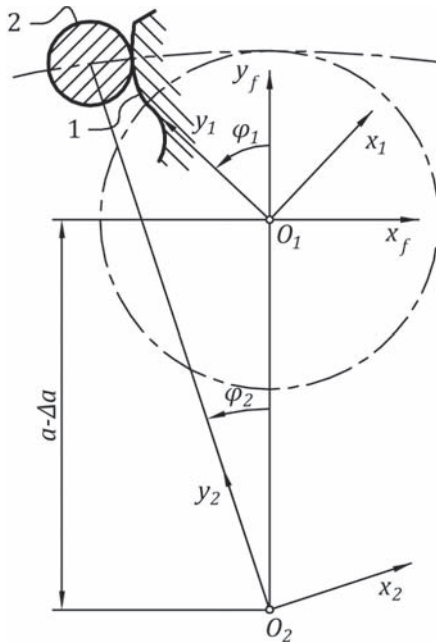
$$M_{f2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & -a + \Delta a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \blacktriangleright$$

### Mathematical model of internal pin gear mesh

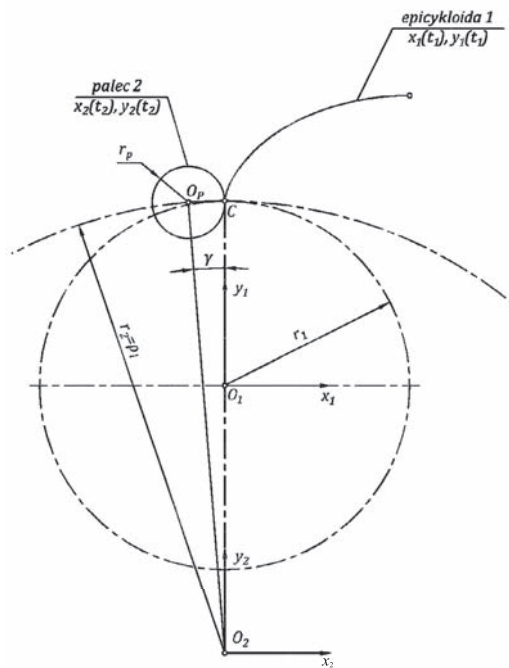
**Słowa kluczowe:** wewnętrzne zazębienie palcowe, analiza styku zębów, błąd ruchu

**Keywords:** internal pin gearing, tooth contact analysis, transmission error

The paper presents a mathematical model of internal pin gear mesh. The results of a tooth contact analysis performed for a sample gear pair with the aid of the developed model have been also presented. Moreover, the influence of the axes distance error on the contact ratio and transmission error has been determined.



Rys. 1. Przyjęte układy współrzędnych, gdzie:  $a$  – odległość osi kół przekładni,  $\Delta a$  – błąd rozstawienia osi kół,  $\varphi_1$  – kąt obrotu zębnika,  $\varphi_2$  – kąt obrotu koła



Rys. 2. Zarys zęba zębnika i koła, gdzie:  $r_1$  – promień podziałowy zębnika,  $r_2$  – promień podziałowy koła,  $r_p$  – promień palca,  $\rho_1$  – promień okręgu odtaczającego

► Ponadto do opisu krzywych należy stosować jednorodną reprezentację wektorów. Przyjmując, że  $\vec{n}_1^{(1)}$  i  $\vec{n}_2^{(2)}$  są wektorami normalnymi do zarysów zębów odpowiednio zębnika i koła w układach 1 i 2, wektory normalne w układzie  $f$  wyrażają się zależnościami:

$$\vec{n}_1^{(f)} = L_{f1} \vec{n}_1^{(1)} \quad (5)$$

$$\vec{n}_2^{(f)} = L_{f2} \vec{n}_2^{(2)} \quad (6)$$

gdzie:  $L_{f1}$  – macierz transformacji z układu 1 do  $f$ ,  $L_{f2}$  – macierz transformacji z układu 2 do  $f$ . Poszczególne macierze występujące we wzorach (5) i (6) otrzymuje się poprzez usunięcie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny jednorodnych macierzy transformacji (3) i (4).

### Parametryczne równania zarysów zębów

W omawianym wewnętrznym zazębieniu palcowym ząb koła dużego jest punktową hipocykloidą (pkt C), natomiast ząb zębnika – epicykloidą 1 (rys. 2) utworzoną w wyniku odtaczania okręgu o promieniu  $r_2 = \rho_1$  po okręgu o promieniu  $r_1$ . Parametryczna reprezentacja epicykloidy 1 w układzie  $x_1, y_1$  dana jest wzorem (7):

$$\vec{r}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1 + \rho_1) \sin t_1 - \rho_1 \sin \left( t_1 \frac{r_1 + \rho_1}{\rho_1} \right) \\ (r_1 + \rho_1) \cos t_1 - \rho_1 \cos \left( t_1 \frac{r_1 + \rho_1}{\rho_1} \right) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

gdzie  $t_1$  to parametr epicykloidy. W praktyce ząb koła zastępuje się palcem o promieniu  $r_p$ . Wektorowa reprezentacja zarysu palca 2 w układzie  $x_2, y_2$  dana jest wzorem (8):

$$\vec{r}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2(t_2) \\ y_2(t_2) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \cos(t_2 + \gamma) - r_2 \sin \gamma \\ r_p \sin(t_2 + \gamma) + r_2 \cos \gamma \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie:  $t_2$  – parametr okręgu,  $\gamma$  – kąt pomiędzy odcinkiem  $O_p O_2$  a prostą  $y_2$ , dany wzorem (9):

$$\gamma = \arccos \left( \frac{2r_2^2 - r_p^2}{2r_2^2} \right) \quad (9)$$

Wektory normalne do zarysów zębów określone są zależnościami (10) i (11):

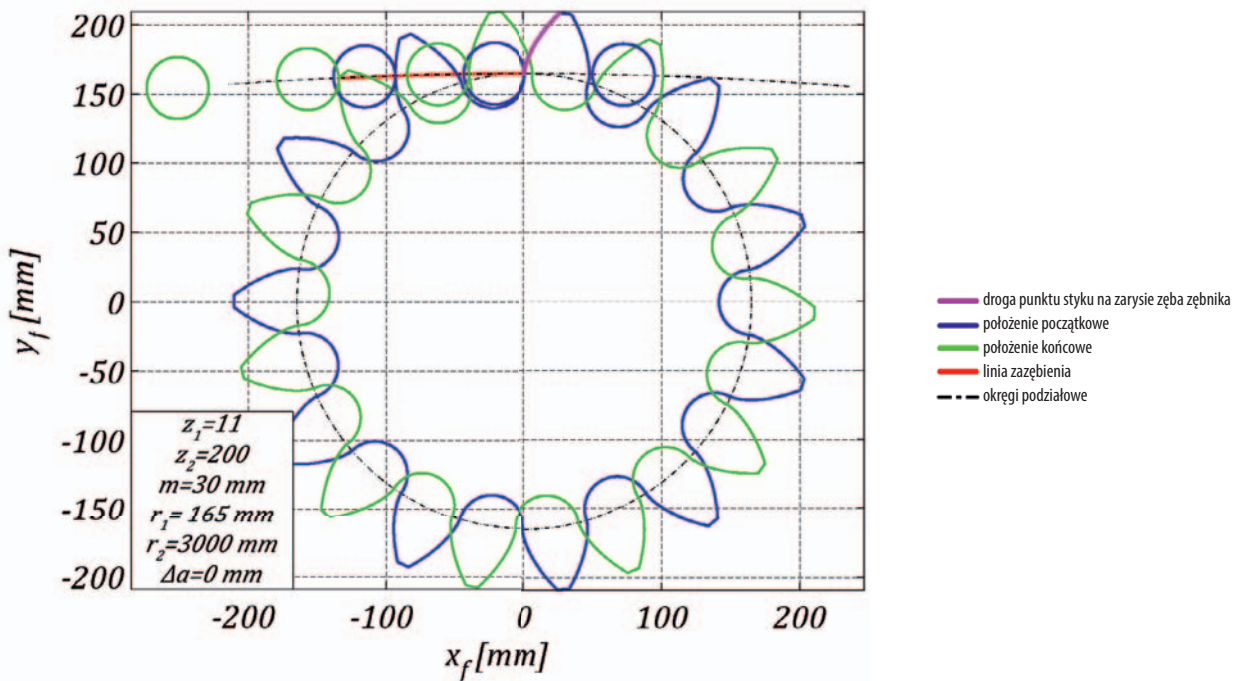
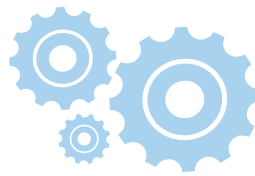
$$\vec{n}_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\vec{n}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial t_2}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial t_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

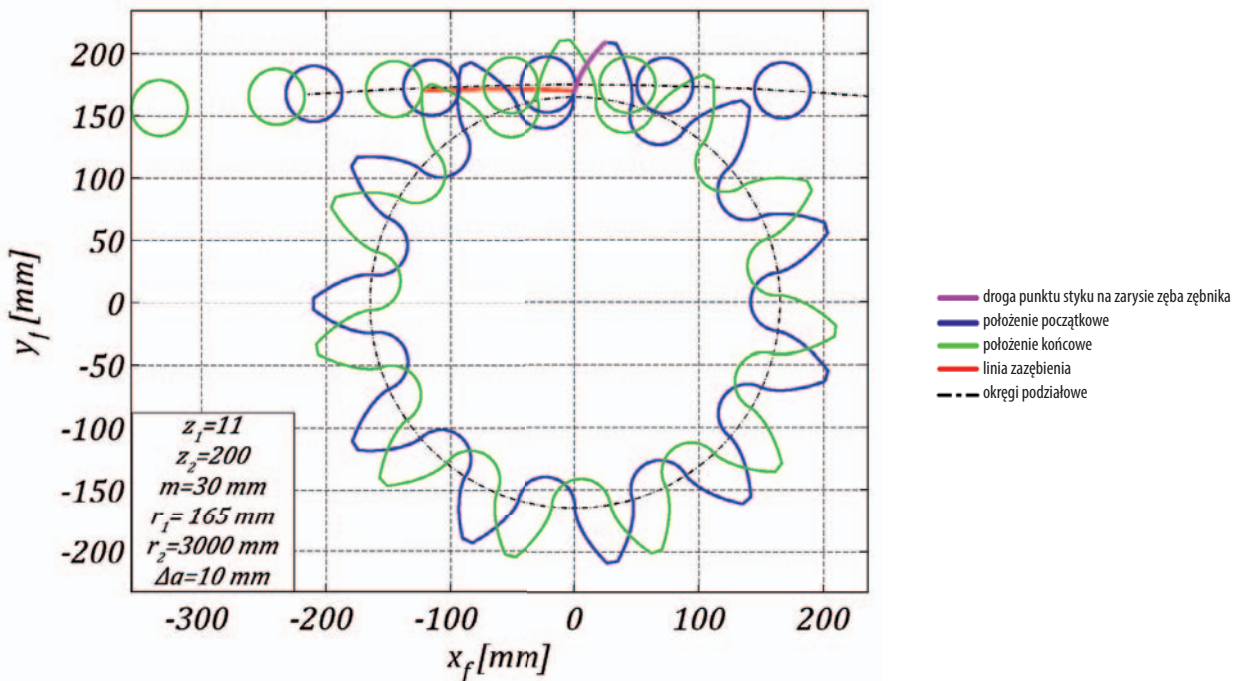
### Analiza styku zębów

Poniżej zaprezentowano wyniki analizy styku zębów wewnętrznego zazębienia palcowego przeprowadzonej na podstawie opracowanego modelu matematycznego.

Warunek ciągłości zazębienia wyraża się poprzez układ równań (12) [6]:



Rys. 3. Wyniki analizy styku zębów dla przekładni bezodchytkowej



Rys. 4. Wyniki analizy styku zębów dla przekładni z błędem rozstawienia osi  $\Delta a = 10 \text{ mm}$

$$\begin{cases} \bar{r}_1^{(f)}(t_1, \varphi_1) = \bar{r}_2^{(f)}(t_2, \varphi_2) \\ \bar{n}_1^{(f)}(t_1, \varphi_1) = \bar{n}_2^{(f)}(t_2, \varphi_2) \end{cases} \quad (12)$$

Pierwsze równanie układu (12) zapewnia, że zarysy zębów będą miały punkt wspólny. Drugie równanie układu (12) zapewnia natomiast ciągłą styczność zarysów. Zadaniem analizy styku zębów jest wyznaczenie z układu (12) związków pomiędzy parametrami  $t_1, t_2, \varphi_2$  a kątem obrotu zębnika  $\varphi_1$ . Można to zrealizować, rozwiązując powyższy układ numerycznie dla kolejnych

dystrybucyjnych wartości kąta obrotu zębnika  $\varphi_1$ . Tym sposobem otrzymuje się funkcje:

$$t_1(\varphi_1), t_2(\varphi_1), \varphi_2(\varphi_1) \quad (13)$$

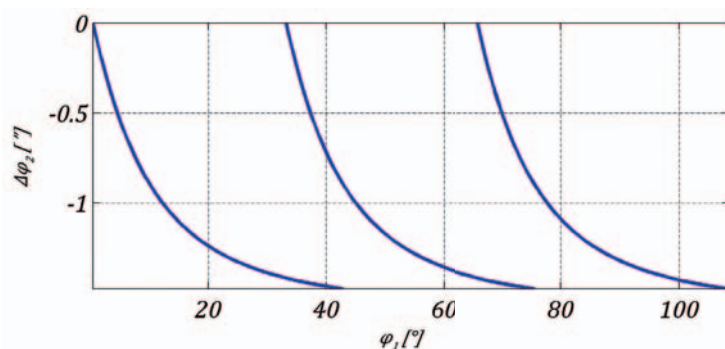
Następnie, wprowadzając związki (13) do wzorów (1) i (2), otrzymuje się linię styku  $\bar{r}_1^{(f)}(\varphi_1), \bar{r}_2^{(f)}(\varphi_1)$ , a po wprowadzeniu do wzorów (10) i (11) – drogę punktu styku na zarysie zęba odpowiednio zębnika  $\bar{r}_1^{(1)}(\varphi_1)$  i koła  $\bar{r}_2^{(2)}(\varphi_1)$ .

Wyniki analizy styku zębów dla przykładowej pary zębatej przedstawiono na rys. 3. ▶

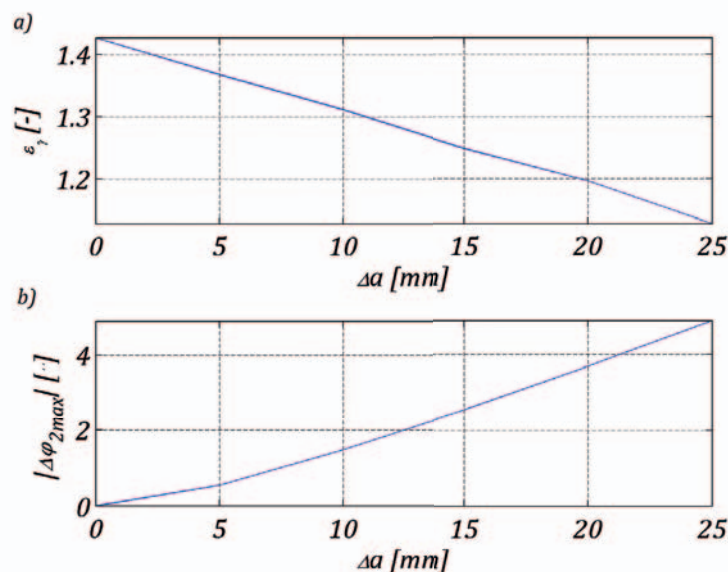
► Linia zażębienia będąca miejscem geometrycznym kolejnych położenia punktu styku obserwowanych w nieruchomym układzie współrzędnych  $f$  dla przekładni bez błędu rozstawienia osi jest fragmentem łuku okręgu podziałowego koła. Współpraca rolki z zębem rozpoczyna się w okolicy średnicy podziałowej zębnika (rys. 3 – kolor niebieski), a kończy się u jego wierzchołka (rys. 3 – kolor zielony). Stopień pokrycia jest stosunkiem długości linii zażębienia do podziałki i dla przypadku z rys. 3 wynosi  $\varepsilon_v = 1,426$ . Ponadto zachowana jest stałość przełożenia – nie występuje błąd przekazywania ruchu.

Analizując tę samą przekładnię z uwzględnieniem błędu rozstawienia osi kół wynoszącym  $\Delta a = 10$  mm (rys. 4), można stwierdzić, że linia styku nie jest łukiem okręgu, a jej długość maleje. Tym samym skraca się czynna wysokość zęba zębnika, co skutkuje zmniejszeniem stopnia pokrycia, który dla przypadku z rys. 4 wyniósł  $\varepsilon_v = 1,311$ .

Co więcej – nie została zachowana stałość przełożenia. Miarą tej niestalości może być błąd ruchu zdefiniowany jako odchyłka przyrostu kąta obrotu koła  $\Delta\varphi_2$  w funkcji kąta obrotu zębnika  $\varphi_1$  (rys. 5).



Rys. 5. Błąd ruchu dla przekładni z błędem rozstawienia osi  $\Delta a = 10$  mm



Rys. 6. Wpływ błędu rozstawienia osi kół: a) na stopień pokrycia, b) na maksymalną wartość bezwzględną błędu przekazywania ruchu

Na rys. 6 zilustrowano wpływ błędu rozstawienia osi kół na stopień pokrycia oraz na maksymalną wartość bezwzględną błędu przekazywania ruchu.

Im większy jest błąd rozstawienia osi, tym mniejszy jest stopień pokrycia i większa nierównomierność przekazywania ruchu. W obydwu przypadkach zależności te są niemal liniowe. Należy również zaznaczyć, że przy dużych wartościach błędu rozstawienia osi kół może wystąpić interferencja palca z zębem zębnika, która nie będzie kompensowana odkształceniem zębów. Z powyższych względów podczas projektowania przekładni tego typu należy przewidzieć dokładne wykonanie korpusu przekładni lub możliwość regulacji rozstawienia osi.

### Podsumowanie

W artykule zaprezentowano matematyczny model wewnętrznej zażębienia palcowego. Wykazano przydatność tego modelu w analizie styku zębów przekładni idealnej oraz przekładni z błędem rozstawienia osi kół. Ponadto stwierdzono, że wraz ze wzrostem błędu rozstawienia osi kół:

- zmniejsza się czynna wysokość zęba zębnika,
  - maleje długość linii zażębienia, a tym samym poskokowy wskaźnik przyporu,
  - zwiększa się nierównomierność przekazywania ruchu,
  - może wystąpić interferencja palca z zębem zębnika.
- Ponadto wyprowadzone równania mogą posłużyć do modelowania geometrii użębienia w systemach CAD.

*Badania realizowane w ramach Projektu „Opracowanie innowacyjnego typu zgarniacza ze zintegrowanym napędem obiegowym do nowych lub modernizowanych osadników” Nr POIR.01.01.01-00-0286/15-00 w ramach Działania 1.1 „Projekty B+R Przedsiębiorstw”, Poddziałania 1.1.1 „Badania przemysłowe i prace rozwojowe realizowane przez przedsiębiorstwa” POIR w 2015 r. Konkurs 1/1.1.1/2015 Programu Operacyjnego Inteligentny Rozwój 2014-2020 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.* □

### Piśmiennictwo

1. [www.360platform.com](http://www.360platform.com).
2. [www.tsubakimoto.com](http://www.tsubakimoto.com).
3. Radzevich S.P.: *Theory of Gearing Kinematics, Geometry and Synthesis*. CRC Press, Boca Raton 2013.
4. Stryczek J.: *Koła zębate maszyn hydraulicznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007.
5. Daniels G.: *Watchmaking*. Philip Wilson Publishers, London 2011.
6. Litvin F.L., Fuentes A.: *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge University Press, 2004.
7. Batsch M.: *Comparative fatigue testing of gears with involute and convexo-concave teeth profiles*. „Advances in Manufacturing Science and Technology”, Vol. 40, No. 2/2016, pp. 5-25.
8. Warda B.: *Stanowisko do badania trwałości zażębienia obiegowej przekładni cykloidalnej*. „Tribologia”, 6/2006, s. 131-140.